Anhang D: Differentialgleichungen

D Differentialgleichungen **119**

D.1 Herleitung der harmonischen Schwingung 119

D.2 Lösung für eine freie harmonische Schwingung 120

D.3 Gedämpfte harmonische Schwingung 123

D.4 Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Anregung 124

D Differentialgleichungen

Im folgenden werden einfache Differentialgleichungen besprochen, wie sie in der Mechanik oder in elektrischen Schaltkreisen vorkommen. In beiden Fällen wandeln sich verschiedene Energieformen ineinander um, so dass eine Schwingung entsteht.

D.1 Herleitung der harmonischen Schwingung

Wir betrachten ein Pendel der Masse m und der Fadenlänge l, dessen Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ ist. Zunächst vernachlässigen wir Reibung und betrachten den Fall ohne äußere Anregungskräfte. Die kinetische Energie ist

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{D.1}$$

und die potentielle Energie

$$E_{pot}(t) = mgh(t) = m\,g\,l\cdot(1-\cos\varphi) \tag{D.2}$$

Harmonische Näherung Diese potentielle Energie kann nahe der Ruhelage genähert werden[21]. Im Fall des Pendels liefert die Taylor-Entwicklung $\cos\varphi \approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2 \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2$, wobei wir zusätzlich benützt haben, dass für kleine Auslenkungswinkel $\sin\varphi = x/l \approx \varphi$ ist. Daraus folgt, dass

$$E_{pot}(t) \approx \frac{1}{2}m\,\frac{g}{l}\,x^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,x^2 \tag{D.4}$$

mit der Eigenfrequenz (Kreisfrequenz) $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Die Gesamtenergie

$$E_{tot} = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \tag{D.5}$$

muss zeitlich konstant sein. Ableiten nach der Zeit liefert daher

$$\partial_t E_{tot} = 0 \;=\; \partial_t E_{kin} + \partial_t E_{pot} \tag{D.6}$$

$$=\; m\dot{x}\,\ddot{x} + m\,\omega_0^2\,x\,\dot{x} = m\dot{x}\cdot\left(\ddot{x}+\omega_0^2 x\right) \tag{D.7}$$

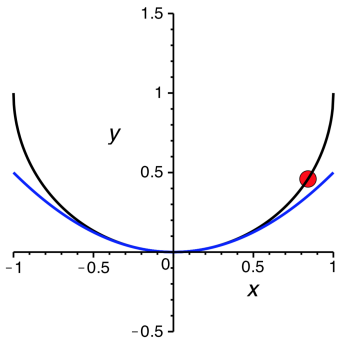

Abb. D.1
Näherung des Potentials des Pendels durch ein quadratisches Potential.

[21] Tatsächlich ist nahe der Ruhelage jedes Potential näherungsweise parabelförmig, denn in der Ruhelage x_0 muss ja gerade ein Minimum der potentiellen Energie vorliegen, $\partial_x E_{pot}(x_0) = 0$. Eine Taylorentwicklung liefert daher

$$E_{pot}(x) \;=\; E_{pot}(x_0) + \partial_x E_{pot}(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\partial_x^2 E_{pot}(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\approx\; E_{pot}(x_0) + \frac{1}{2}\partial_x^2 E_{pot}(x_0)\cdot(x-x_0)^2 \tag{D.3}$$

Aus diesem Grund sind harmonische Schwingungen von überragender Bedeutung.

Der Ausdruck in der Klammer muss offenbar zu jeder Zeit Null sein,

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0} \tag{D.8}$$

Bewegungsgleichung für eine harmonische Schwingung

Die Näherung durch ein quadratisches Potential führt offenbar immer zu einer linearen (in x) Differenzialgleichung zweiter Ordnung (zweite Ableitung) mit reellem Koeffizienten ω_0.

D.2 Lösung für eine freie harmonische Schwingung

Eine Bewegungsgleichung für $x = x(t)$ der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \tag{D.9}$$

gilt für eine harmonische Schwingung ohne Reibung und ohne äußere Kräfte. Die allgemeine Lösung hierfür lautet

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0\, t + \phi_0)} \tag{D.10}$$

Für eine solchen Differenzialgleichung 2. Ordnung braucht man 2 "Integrationskonstanten", diese sind in diesem Fall die Amplitude x_0 und der Anfangsphase ϕ_0. Man zeigt dies, indem man die zweifache Ableitung bildet,

$$\dot{x} = \omega_0\, x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{D.11}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\, x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0) = -\omega_0^2\, x \tag{D.12}$$

und in die Bewegungsgleichung einsetzt,

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = -\omega_0^2 x + \omega_0^2 x = 0 \tag{D.13}$$

Setzt man diese Lösung in die Formeln für die kinetische und potentielle Eergie ein, so erhält man

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2\, \cos^2(\omega_0 t + \phi_0) \tag{D.14}$$

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2\, \sin^2(\omega_0 t + \phi_0) \tag{D.15}$$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ist folgt, dass die Gesamtenergie erhalten ist,

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \tag{D.16}$$

Die beiden Konstanten x_0 und ϕ_0 müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Bsp.: Sei $\phi_0 = 0$. Dann ist zum Zeitpunkt $t = 0$

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = \omega_0 x_0, \qquad \ddot{x}(0) = 0 \tag{D.17}$$

$$E_{kin}(0) = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2\, x_0^2, \qquad E_{pot}(0) = 0 \tag{D.18}$$

Bsp.: Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Auslenkung $x(0) = \frac{1}{2}x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0$. Dann ist zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\phi_0 = \arcsin\frac{1}{2} = 30^0 \tag{D.19}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \omega_0 x_0 \cos(30^0), \qquad x_0 = \frac{v_0}{\omega_0 \cos(30^0)} \tag{D.20}$$

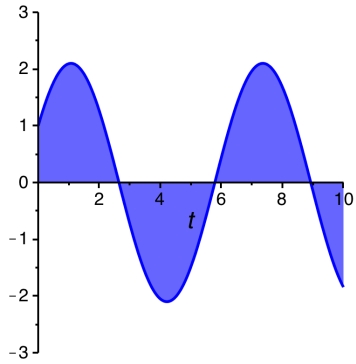

Abb. D.2
Schwingung mit Anfangsgeschwindigkeit.

Alternative reelle Lösung

Anstelle der Lösung aus Gl. D.10 kann man auch eine Summe verwenden,

$$\boxed{x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)} \tag{D.21}$$

verwenden[22]. Diese Lösung ist völlig gleichwertig mit Gl. D.10 für

$$A = x_0 \cos(\phi_0), \qquad B = x_0 \sin(\phi_0) \tag{D.22}$$

Dies ergibt sich aus den Additionstheoremen für sin und cos Funktionen[23]. Insbesondere für die Anfangsbedingungen ist einfach $B = x(0)$ und $A = v(0)/\omega_0$.

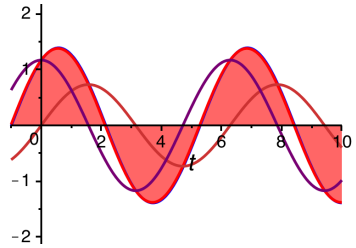

Abb. D.3
Sume einer sin und cos Funktion mit unterschiedlicher Amplitude

Komplexe Lösung

Anstelle der Lösung aus Gl. D.10 kann man auch

$$\boxed{x_c(t) = x_0 \cdot e^{i(\omega_0 t + \phi_0)}} \tag{D.28}$$

verwenden mit reellem x_0, ω_0 und ϕ_0. Die Ableitungen sind dann

$$\dot{x}_c = i\omega_0 x_c, \qquad \ddot{x}_c = -\omega_0^2 x_c \tag{D.29}$$

[22] Da die Differentialgleichung linear in x ist, ist jeder Summand einzeln bereits eine Lösung.

[23] Man kann komplexe Schreibweisen effektiv benutzen, um Additionstheoreme wie

$$x_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) = A \sin\omega_0 t + B \cos\omega_0 t \tag{D.23}$$

für reelle x_0, A, B zu beweisen. Da $\cos\omega_0 t = Re(e^{i\omega_0 t})$ und $\sin\omega_0 t = Re(-ie^{i\omega_0 t})$ ist dies gleichbedeutend mit

$$Re(-i\,x_0\,e^{i(\omega_0 t+\phi_0)}) = Re(-i\,A\,e^{i\omega_0 t} + B\,e^{i\omega_0 t}) \tag{D.24}$$

Dies ist erfüllt für

$$-i\,x_0\,e^{i(\omega_0 t+\phi_0)} = -i\,A\,e^{i\omega_0 t} + B\,e^{i\omega_0 t} \tag{D.25}$$

$$x_0\,e^{i\omega_0 t}\,e^{i\phi_0} = (A + iB)\,e^{i\omega_0 t} \tag{D.26}$$

Für den Realteil bzw. Imaginärteil von $x_0\,e^{i\phi_0}$ muss also gelten

$$A = x_0 \cos\phi_0, \qquad B = x_0 \sin\phi_0 \tag{D.27}$$

Für reelle ω_0 ist dies offenbar auch eine Lösung der Schingungsgleichung. Physikalisch interpretiert werden kann der Realteil

$$x(t) = Re(x_c) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_c) \quad \text{mit} \quad \phi_c = \phi_0 - \frac{\pi}{2} \tag{D.30}$$

oder der Imaginärteil

$$x(t) = Im(x_c) = x_0 \sin(\omega_0 t + \phi_c) \quad \text{mit} \quad \phi_c = \phi_0 \tag{D.31}$$

Beide Lösungen sind also äquivalent.

Allgemeines Lösungsverfahren

Um die allgemeine Lösung für homogene lineare Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten zu erhalten, wählt man als Ansatz

$$x_a(t) = c \cdot e^{\lambda t} \tag{D.32}$$

Hier ist c eine willkürliche Konstante. Wegen

$$\dot{x}_a = \lambda\, x_a, \qquad \ddot{x}_a = \lambda^2\, x_a \tag{D.33}$$

folgt bei Einsetzen in die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$,

$$\lambda^2\, x_a + \omega_0^2\, x_a = 0 \tag{D.34}$$

aus dem 'charakteristische Polynom'

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm\, i\, \omega_0 \tag{D.35}$$

dass es zwei Lösungen für λ gibt. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist dann ein Linearkombination der beiden möglichen Lösungen

$$\boxed{x_c(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}} \tag{D.36}$$

in diesem Fall also

$$\boxed{x_c(t) = C_1\, e^{i\omega_0 t} + C_2\, e^{-i\omega_0 t}} \tag{D.37}$$

mit im allgemeinen komplexen Zahlen C_1, C_2. Der Realteil von x_c (oder der Imaginärteil) kann als Lösung interpretiert werden. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} Re(x_c) &= Re(C_1\, e^{i\omega_0 t} + C_2\, e^{-i\omega_0 t}) && \text{(D.38)} \\ &= Re(C_1 + C_2)\, \cos\omega_0 t - Im(C_1 - C_2)\, \sin\omega_0 t && \text{(D.39)} \end{aligned}$$

Dies ist wieder gleichbedeutend mit Gl. D.21 für

$$A = -Im(C_1 - C_2), \qquad B = Re(C_1 + C_2) \tag{D.40}$$

D.3 Gedämpfte harmonische Schwingung

Für eine Schwingung mit Reibung gibt es in der Bewegungsgleichung einen weiteren geschwindigkeitsabhängigen Term,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{D.41}$$

Als Ansatz für die Lösung wird verwendet

$$x_a(t) = C \cdot e^{\lambda t} \tag{D.42}$$

Die Ableitungen lauten

$$\dot{x}_a = \lambda x_a, \qquad \ddot{x}_a = \lambda^2 x_a \tag{D.43}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) x_a = 0 \tag{D.44}$$

Da $x_a(t)$ nicht immer Null sein wird, muss das charakteristische Polynom Null sein,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{D.45}$$

Für $\gamma = 0$ folgt $\lambda = \pm i\omega_0$ und damit die Lösung von Gl. D.37. Allgemein ergibt sich aber

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega \tag{D.46}$$

mit

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \tag{D.47}$$

Damit ist die allgemeine komplexe Lösung für eine gedämpfte harmonische Schwingung ohne äußere Anregung

$$x_{h,c}(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{D.48}$$

oder

$$\boxed{x_{h,c}(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{-i\omega t} \right)} \tag{D.49}$$

Wieder kann der Realteil oder der Imaginärteil von $x_h(t)$ als physikalische Lösung interpretiert werden, also z.B.

$$\boxed{x_h = Re(x_{h,c}) = e^{-\gamma t} \ (A \cdot \sin\omega t + B \cdot \cos\omega t)} \tag{D.50}$$

Bei kleiner Reibung ist $\gamma < \omega_0$ und daher $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ eine reelle Größe. Damit beschreibt der Term $e^{i\omega t}$ eine Schwingung und $x_h(t)$ eine gedämpfte Schingung, deren Amplitude $x_0\, e^{-\gamma t}$ exponentiell abnimmt. Diesen Fall bezeichnet man als "Schwingfall".

Im Gegensatz dazu liegt für große Reibung $\gamma > \omega_0$ keine Schwingung mehr vor, sondern $x_h(t)$ ist eine rein exponentiell abfallende Funktion. Diesen Fall nennt man "Kriechfall". Der Fall $\gamma = \omega_0$ wird aperiodischer Grenzfall genannt.

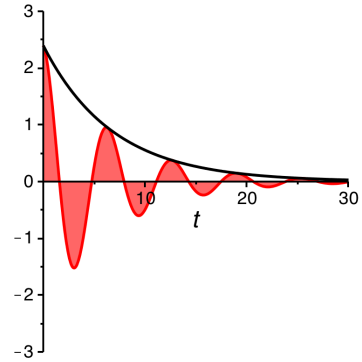

Abb. D.4
Schwache Dämpfung.

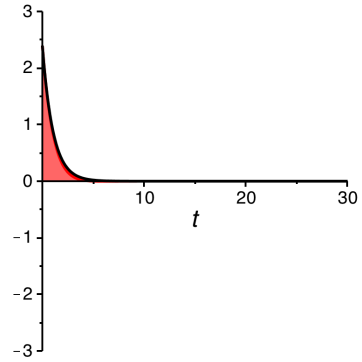

Abb. D.5
Aperiodischer Grenzfall.

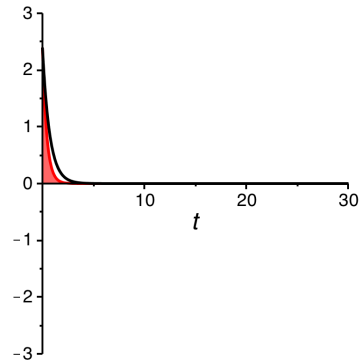

Abb. D.6
Starke Dämpfung.

D.4 Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Anregung

Wird ein harmonischer Oszillator von außen periodisch angeregt, so gilt

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cdot \cos\omega_a t} \tag{D.51}$$

Hier ist a (reell) die maximale Beschleunigung durch die äußere Kraft und es wurde (durch die Wahl der cos-Funktion) angenommen, dass die Anregung zur Zeit $t = 0$ maximal ist. Die Anregungsfrequenz ω_a soll beliebig sein, in der Regel also weder die Eigenfrequenz ω_0 der freien ungedämpften Schwingung, noch die Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ der freien gedämpften Schwingung.

Da die Gleichung reelle Koeffizienten hat, ist es ist wieder einfacher, die komplexe Erweiterung dieser Gleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cdot e^{i\omega_a t} \tag{D.52}$$

zu lösen und anschließend wieder den Realteil als physikalische Lösung zu interpretieren.

Die allgemeine Lösung dieser Schwingungsgleichung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung x_h des freien Oszillators und einer speziellen Lösung für die äußere Anregung (also den inhomogenen Teil der Differentialgleichung),

$$x(t) = x_{h,c}(t) + x_{inh}(t) \tag{D.53}$$

mit

$$x_{h,c}(t) = C_h \cdot e^{\lambda t}, \qquad x_{inh}(t) = x_{0,c} \cdot e^{i\omega_a t} \tag{D.54}$$

Damit ist

$$\dot{x} = \lambda \cdot x_{h,c} + i \cdot \omega_a \cdot x_{inh} \tag{D.55}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \cdot x_{h,c} - \omega_a^2 \cdot x_{inh} \tag{D.56}$$

Einsetzen in die Schwingungsgleichung ergibt

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) x_{h,c}(t)}_{=0} + \left(-\omega_a^2 + 2i\gamma\omega_a + \omega_0^2\right) x_{inh}(t) = a \cdot e^{i\omega_a t} \tag{D.57}$$

Da die Frequenz von $x_{h,c}$ die Eigenfrequenz ω der freien Schwinung mit Dämpfung ist und diese unabhängig von der Anregungsfrequenz ω_a ist, folgt, dass der erste Summand links gleich Null sein muss.

Einschwingvorgang

Der erste Summand links ist Null, wenn λ die Gl. D.46 erfüllt. Der $x_{h,c}(t)$ Anteil der Lösung fällt exponentiell mit der Zeit, d.h. nach einer Zeit $t >> 1/\gamma$ bleibt nur der $x_a(t)$ Anteil. Dann ist auch die Abhängigkeit von den Anfangbedingungen verschwunden.

Damit der Rest für alle Zeiten Null ist, muss gelten

$$\left(-\omega_a^2 + 2i\gamma\omega_a + \omega_0^2\right) \cdot x_{0,c} = a \tag{D.58}$$

Daraus folgt

$$x_{0,c} = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_a^2 + 2i\gamma\omega_a} = a \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega_a^2 - 2i\gamma\omega_a}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\gamma\,\omega_a)^2} \tag{D.59}$$

und

$$\boxed{x_c(t) = x_{h,c}(t) + |x_{0,c}| \cdot e^{i(\omega_a t + \phi_{inh})}} \tag{D.60}$$

mit

$$|x_{0,c}| = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\gamma^2\,\omega_a^2}} \tag{D.61}$$

$$\tan\phi_{inh} = \frac{Im(x_{0,c})}{Re(x_{0,c})} = -\frac{2\gamma\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \tag{D.62}$$

Nach dem Einschwingvorgang ist die Amplitude $|x_{0,c}|$ proportional zur Anregung a und wird maximal, wenn die Anregungsfrequenz ω_a nahe der Eigenfrequenz ω_0 der freien Schwingung ohne Dämpfung liegt. Die Dämpfung γ beschränkt in diesem Bereich die maximale Amplitude.

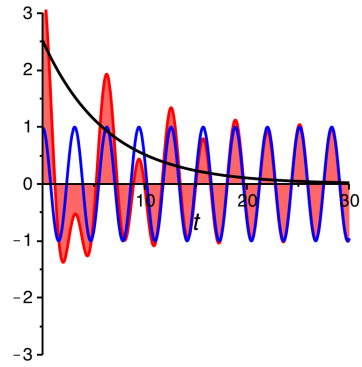

Abb. D.7 Gedämpfte Schwingung mit äußerer periodischer Anregung.